第1章 自動制御

1.1 ラプラス変換

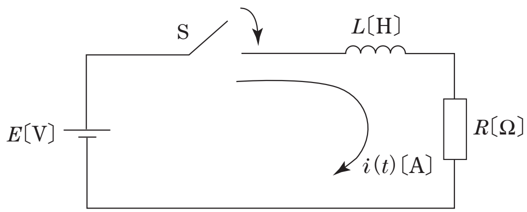
要点

ラプラス変換とは，時間t領域における微分方程式がラプラス変換をすることによりs領域の代数方程式に置き換わり，この代数方程式の解を求め，その解をラプラス逆変換することによりt領域の解を得ることができる手法である．

t領域	ラプラス変換	s領域
微分方程式，初期値	⟶	代数方程式
	ラプラス逆変換	
t領域の解	⟵	s領域の解

ラプラス変換を使用した例を示す．

第1図に示すR－L直列回路でスイッチSを閉じたときの電流を求める．



第1図　$R-L$ 直列回路

微分方程式$L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+Ri(t)=E$において，$i(t)$の初期値を0として従来の微分方程式を解く方法とラプラス変換により解く方法を比較してみる．

〔従来の方法〕

回路方程式を次のように変形する．($i(t)$をiと表す)

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=-\frac{R}{L}\left(i-\frac{E}{R}\right) \quad ①$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\left(i-\frac{E}{R}\right)}=-\frac{R}{L}\mathrm{d}t \quad ②$$

両辺を積分する．

$$\mathrm{In}\left(i-\frac{E}{R}\right)=-\frac{R}{L}t+C \quad ③$$

e^Cを新たにCと置くと，

$$i-\frac{E}{R}=C\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} \quad ④$$

$$i=\frac{E}{R}+C\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} \quad ⑤$$

$t=0$で$i=0$の初期条件を入れると，

$$0=\frac{E}{R}+C \qquad C=-\frac{E}{R} \quad ⑥$$

$$i(t)=\frac{E}{R}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right) \qquad (答)$$

〔ラプラス変換による方法〕

未知数iのラプラス変換を$I(s)$とし，回路方程式をラプラス変換する．

$$\mathcal{L}\left[L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right]+\mathcal{L}[Ri]=\mathcal{L}[E] \quad ①$$

$$L\{sI(s)-i(0)\}+RI(s)=\frac{E}{s} \quad ②$$

$i(0)=0$であるから，

$$I(s)=\frac{E}{s(sL+R)}=\frac{E}{L}\,\frac{1}{s\left(s+\frac{R}{L}\right)} \quad ③$$

部分分数展開をして，

$$I(s)=\frac{E}{R}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right) \quad ④$$

基本例題にチャレンジ

次の時間 t の関数を，ラプラス変換の定義式に従いラプラス変換せよ．

(1) E　　　(2) e^{-at}

やさしい解説

ラプラス変換の定義式より，時間関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ は次式で求められる．

$$F(s)=\int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

この定義式の $f(t)$ に与えられた関数を代入してラプラス変換を求める．

(1) $$\mathcal{L}[E]=\int_0^{\infty} E\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=E\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=E\left[-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right]_0^{\infty}$$

$$=E\left(-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-\infty}+\frac{1}{s}\mathrm{e}^{0}\right)=E\left(0+\frac{1}{s}\right)=\frac{E}{s}\qquad（答）$$

(2) $$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-at}]=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(s+a)t}\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{(s+a)}\mathrm{e}^{-(s+a)t}\right]_0^{\infty}$$

$$=-\frac{1}{s+a}\mathrm{e}^{-\infty}+\frac{1}{s+a}\mathrm{e}^{0}=0+\frac{1}{s+a}$$

$$=\frac{1}{s+a}\qquad（答）$$

応用問題にチャレンジ

次の時間 t の関数をラプラス変換の定義式に従いラプラス変換せよ．

(1) $\sin\omega t$　　　(2) $\mathrm{e}^{-at}\sin\omega t$

やさしい解説

基本問題と同様に，ラプラス変換の定義式に代入して計算する．

(1) $$\mathcal{L}[\sin\omega t]=\int_0^{\infty}\sin\omega t\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

ここで，$\sin\omega t=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}}{2\mathrm{j}}$ で表されるから（オイラーの公式より），

$$=\frac{1}{2\mathrm{j}}\int_0^\infty (\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t})\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{j}}\int_0^\infty \{\mathrm{e}^{-(s-\mathrm{j}\omega)t}-\mathrm{e}^{-(s+\mathrm{j}\omega)t}\}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega}-\frac{1}{s+\mathrm{j}\omega}\right)$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{j}}\cdot\frac{(s+\mathrm{j}\omega)-(s-\mathrm{j}\omega)}{(s-\mathrm{j}\omega)(s+\mathrm{j}\omega)}=\frac{1}{2\mathrm{j}}\cdot\frac{2\mathrm{j}\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\qquad\text{(答)}$$

(2) $\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-at}\sin\omega t]=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-at}\sin\omega t\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$

ここで，$\sin\omega t=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}}{2\mathrm{j}}$ で表されるから，

$$=\frac{1}{2\mathrm{j}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-at}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t})\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{j}}\int_0^\infty \{\mathrm{e}^{-(s+a-\mathrm{j}\omega)t}-\mathrm{e}^{-(s+a+\mathrm{j}\omega)t}\}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\frac{1}{s+a-\mathrm{j}\omega}-\frac{1}{s+a+\mathrm{j}\omega}\right)$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{j}}\cdot\frac{(s+a+\mathrm{j}\omega)-(s+a-\mathrm{j}\omega)}{(s+a-\mathrm{j}\omega)(s+a+\mathrm{j}\omega)}$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{j}}\cdot\frac{2\mathrm{j}\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$=\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}\qquad\text{(答)}$$

ここが重要

第2種の数学の中で重要な項目にラプラス変換がある．過渡現象，自動制御に活用され，必ずマスターしなければならない項目である．特に，自動制御の中では頻繁に出てくる．

これまで代表的な関数のラプラス変換を求めたが今後役に立つ公式を第2表に示す．これも必ず覚えなければならない．

第2表　ラプラス変換の重要な公式

t 領域における移動	$\mathcal{L}[f(t-T)]=\mathrm{e}^{-sT}F(s)$
s 領域における移動	$\mathcal{L}[f(t)\mathrm{e}^{-at}]=F(s+a)$
最終値の定理	$\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=f(\infty)=\lim\limits_{s\to 0} sF(s)$
初期値の定理	$\lim\limits_{t\to 0} f(t)=f(0)=\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$

この中で，特に最終値の定理については定常偏差を求める場合によく使用する．

演　習　問　題

【問題 1】

次の時間tの関数を，ラプラス変換の定義式に従いラプラス変換せよ．ただし，初期値は0とする．

(1)　t　　(2)　$\cos\omega t$　　(3)　$\displaystyle\int f(t)\,\mathrm{d}t$

(4)　$\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$　　(5)　$\dfrac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2}$

【問題 2】

次の微分方程式をラプラス変換せよ．ただし，初期値はすべて0とする．

(1)　$L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri+\dfrac{1}{C}\displaystyle\int i\,\mathrm{d}t=E$

(2)　$L\dfrac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2}+R\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\dfrac{1}{C}q=E\sin\omega t$

●問題 1 の解答●

(1)　$\mathcal{L}[t]=\displaystyle\int_0^\infty t\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$

部分積分の公式を適用する．